CORRIGÉ

Problème 1 : Vrai-Faux

1. FAUSSE L'océan Pacifique est d'environ $\frac{46}{100} \times 362$ millions de km^2 $= 166,52$ millions de km^2. Par conséquence, sa surface relative à la surface de la Terre est $\frac{166,52}{510} = 0,32651$ environ ce qui est strictement inférieur à $\frac{1}{3}$.

2. VRAIE Imaginons que le code comporte un « 1 », un « 2 », un « 7 », un « 8_a » et un « 8_b ». Dans ce cas, les cinq chiffres sont distinguables et l'on en déduit qu'il y a $120 = 5!$ codes d'accès possibles. Ensuite à chacun de ces codes on associe un code avec seulement un « 1 », un « 2 », un « 7 » et un « 8 » en remplaçant « 8_a » et « 8_b » par « 8 ». Pour chacun de ces codes avec des 1, 2, 7 et 8 il y a deux codes associés avec des « 1 », un « 2 », un « 7 », un « 8_a » et un « 8_b ». On en déduit qu'il y a $60 = \frac{120}{2}$ codes d'accès possibles.

3. VRAIE On a

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - P\left(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}\right) \\ &= 1 - P(A \cup B) \text{ en appliquant la loi de Morgan} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P_A(B) \end{aligned}$$

On en déduit avec les valeurs données dans l'énoncé que

$$0,56 = 1 - 0,2 - P(B) + 0,2 \times 0,3 \text{ et donc } P(B) = 0,3$$

Ainsi $P(B) = P_A(B)$ et donc A et B sont indépendants.

4. VRAIE Notons P_k l'événement « perdre au k-ème jeu » pour $k \geq 1$. Remarquons que $\overline{P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n}$ est l'événement gagner au moins une fois lors des n premières parties. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} P(\overline{P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n}) &= 1 - P(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \\ &= 1 - P(P_1) \times P(P_2) \times \cdots \times P(P_n) \text{ par indépendance} \\ &= 1 - (0.97)^n \end{aligned}$$

par conséquent, $P(\overline{P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n}) \geq 0.5$ si et seulement si $1 - (0.97)^n \geq 0.5$ si et seulement si $0.5 \geq (0.97)^n$ si et seulement si $\ln(0.5) \geq n \ln(0.97)$ (par croissance du logarithme) si et seulement si $\frac{\ln(0.5)}{\ln(0.97)} \leq n$. Or $\frac{\ln(0.5)}{\ln(0.97)} = 22,7$ environ. Puisque n est entier on en déduit que $P(\overline{P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n}) \geq 0.5$ si et seulement si $23 \leq n$.

5. VRAIE Notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un 1 apparaît au lancer du k-ème dé et 0 sinon. La variable aléatoire X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. Au vu de ce qui est écrit dans l'énoncé, la variable aléatoire représentant le gain total à l'issue des 20 lancers est donnée par

$$G = 6 \times (X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}) - 15$$

Calculons l'espérance $\mathbb{E}(G)$ de G :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G) &= \mathbb{E}(6 \times (X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}) - 15) \\ &= 6(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots \mathbb{E}(X_{20})) - 15 \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= 6(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \cdots \frac{1}{6}) - 15 \text{ car l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre } p \text{ est } p \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 - 15 \\ &= 20 - 15 \\ &= 5\end{aligned}$$

6. VRAIE On sait que $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$. On applique ça à $a = \frac{\pi}{12}$ et l'on en déduit donc que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \text{ ou encore } \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$$

Remarquons alors que $(1+\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$ et donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{3}+4}{8} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{2})^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})\right)^2$$

Ainsi, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$. Puisque $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.

Attention à ne pas dire $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$ *donc* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$ *avec l'argument du signe et ensuite de dire que ceci est différent de* $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$. *Nous venons justement de justifier que* $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$

7. VRAIE Notons $\psi : x \mapsto \cos(3x) - \sin(x)$. Un x est solution de $\cos(3x) = \sin(x)$ si et seulement s'il vérifie $\psi(x) = 0$. De plus on a :

$$\psi(0) = 1 > 0,\ \psi\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,\ \psi\left(2\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,\ \psi(\pi) = -1 - 0 < 0,$$

$$\psi\left(4\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,\ \psi\left(5\frac{\pi}{3}\right) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \text{ et } \psi(2\pi) = 1 - 0 > 0$$

On a donc trouvé 7 valeurs qui passent du positif au négatif, avec la continuité de ψ, le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de trouver une valeur où la fonction s'annule entre chacune de ces valeurs successives. Cela nous donne donc 6 valeurs où ψ s'annule sur $[0, 2\pi]$. C'est-à-dire 6 solutions à l'équation $\cos(3x) = \sin(x)$.

Il faut tracer avec sa calculatrice les graphes des fonctions $x \mapsto \cos(3x)$ *et* $x \mapsto \sin(x)$. *On voit apparaître ces* 6 *intersections. Il y a exactement* 6 *solutions mais je considère qu'il suffisait de montrer qu'il y avait au moins* 6 *solutions.*

8. FAUSSE Considérons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puisque f est constante sur chaque intervalle ouvert. On a alors pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 0$. Pourtant f n'est pas constante.

9. FAUSSE Soit $x \neq 0$, alors

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} = 2\frac{\sin(2x)}{2x} = 2\frac{\sin(2x) - \sin(0)}{2x - 0}.$$

On reconnait le taux d'accroissement de sin en 0. Or, puisque sin est dérivable en 0 de dérivée $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on en déduit que $\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y) - \sin(0)}{y - 0} = 1$ et donc, par composition des limites :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

10. VRAIE On écrit $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que z soit racine de P. On a alors

$$\begin{aligned} P(\overline{z}) &= a\overline{z}^3 + b\overline{z}^2 + c\overline{z} + d \\ &= \overline{az}^3 + \overline{b}\overline{z}^2 + \overline{cz} + \overline{d} \text{ car } a, b, c \text{ et } d \text{ sont réels} \\ &= \overline{az^3 + bz^2 + cz + d} \text{ avec les règles de calcul sur la conjugaison complexe} \\ &= \overline{P(z)} \\ &= \overline{0} \text{ car } z \text{ racine de } P \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\overline{z}$ racine de P également.

11. VRAIE Commençons par simplifier la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{e^{k-1}}^{e^k} \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_1^{e^n} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

en utilisant la relation de Chasles. Remarquons ensuite que $\frac{\ln(t)}{t} = \ln'(t)\ln(t)$. On reconnait la dérivée de $(\ln)^2$ évaluée en t à un facteur 2 près. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = [\frac{1}{2}(\ln(t))^2]_1^{e^n} = \frac{1}{2}((\ln(e^n))^2 - (\ln(1))^2) = \frac{n^2}{2}.$$

12. VRAIE Remarquons que $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = |1 - i\sqrt{3}| \times \left|z - \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 2 \times \left|z - i\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right| = 2 \times |z - i|$. Ainsi $|(1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 2$ si et seulement si $|z - i| = 1$. Par conséquent l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 2$ est le cercle de centre le point d'affixe i qui est de coordonnées $(0, 1)$ et de rayon 1.

13. VRAIE On effectue une intégration par parties dans K_{n+1} :

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \int_1^e \frac{(\ln(x))^{n+1}}{x^2} dx \\ &= \int_1^e u'(x)v(x)dx \text{ où } u : x \mapsto -\frac{1}{x} \text{ et } v : x \mapsto \ln(x)^{n+1} \\ &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx \text{ par intégration par parties} \\ &= -\frac{(\ln(e))^{n+1}}{e} + 0 + \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{(n+1)(\ln(x))^n}{x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)K_n \end{aligned}$$

D'où $(n+1)K_n - K_{n+1} = \frac{1}{e}$.

S'il y a une suite d'intégrales avec une équation de récurrence, on peut essayer une intégration par parties.

14. VRAIE On montre facilement par récurrence que les valeurs de u et k dans la fonction sont liées par la relation $u = 2^k$. Or la boucle `while` s'arrête si « $k < n$ » est faux c'est-à-dire si « $k \geq n$ ». Finalement k est incrémenté de 1 à chaque étape et part de 0 par suite, k sera égal à n quand on sort de la boucle `while`. Ainsi k aura la valeur 2^n au moment du `return` et donc u aura la valeur 2^n au moment du `return`. En particulier `surprise(4)=16`

15. VRAIE Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$. Remarquons alors que parmi les deux entiers consécutifs n et $n+1$ il y en a un qui est pair. Ainsi 2 divise $n^3 - n$. De plus parmi les 3 entiers $n-1$, n et $n+1$ il y en a un qui est divisible par 3. Ainsi 3 divise $n^3 - n$. Puisque 2

et 3 sont premiers entre eux et divisent tous les deux $n^3 - n$, on en déduit que $6 = 2 \times 3$ divise $n^3 - n$ (Lemme de Gauss).

16. VRAIE Calculons les premières puissances de 3 modulo 11.

$$3^3 = 27 \equiv 5[11],\ 3^4 \equiv 15 \equiv 4[11] \text{ et } 3^5 \equiv 12 \equiv 1[11]$$

Ainsi $3^5 \equiv 1[11]$. Or $2023 = 5 \times 404 + 3$ donc

$$3^{2023} = (3^5)^{404} \times 3^3 \equiv 1^{504} \times 3^3 \equiv 5[11]$$

et donc $3^{2023} + 6 \equiv 11 \equiv 0[11]$ et puisque $3^{2023} + 6$ est pas congru à 0 modulo 11, $3^{2023} + 6$ est divisible par 11.

Les congruences sont des outils assez puissants dans ce contexte et au programme de math expertes.

17. VRAIE Calculons $-2 \times (7k + 3) + 7 \times (2k + 1) = -14k - 6 + 14k + 7 = 1$. Soit d un diviseur positif commun à $7k + 3$ et $2k + 1$ alors d divise $-2 \times (7k + 3) + 7 \times (2k + 1)$ c'est-à-dire d divise 1. Ainsi le plus grand commun diviseur de $7k + 3$ et $2k + 1$ est 1 et donc $7k + 3$ et $2k + 1$ sont premiers entre eux.

Rechercher une identité de Bézout dans ce genre de cas doit être un réflexe.

18. FAUSSE Remarquons que 3 divise 51 (car $5 + 1 = 6$ est divisible par 3) et 3 divise 39 (car $3 + 9 = 12$ est divisible par 3). On raisonne par l'absurde s'il existait $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $51x + 39y = 1$ alors 3 diviserait $51x + 39y$ c'est-à-dire 3 diviserait 1 ce qui est absurde. D'où la conclusion : l'équation diophantienne $51x + 39y = 1$ n'admet pas de solution.

19. FAUSSE On raisonne par l'absurde. Supposons que $A > 0$ soit rationnel alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $A = \frac{p}{q}$ on a alors $q \ln(2) = p \ln(3)$ ou encore $\ln(2^q) = \ln(3^p)$ ou encore $2^q = 3^p$. Puisque q et p sont des entiers naturels, cette égalité contredit le théorème d'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. D'où la conclusion : A est irrationnel.

20. VRAIE Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = (n + 1)^2$.
— **Initialisation** Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1 = (0 + 1)^2$.
— **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \\ &= (n + 1)^2 + 2n + 3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n + 2)^2 \end{aligned}$$

D'où la conclusion par récurrence.

En testant les premiers termes on conjecture facilement $u_n = (n + 1)^2$

Problème 2 : suites

Partie A - Étude de fonction f

1. On sait que

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ et donc } \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

Remarquons que pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$. Par croissances comparées :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

2. Remarquons que f est produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$$

Ainsi $f'(x)$ est du signe de $(1 - x)$ et l'on en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	0

Il faut toujours factoriser le plus possible ses dérivées pour pouvoir en déterminer le signe facilement.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = x$ si et seulement si $xe^{-x} = x$ si et seulement si $x(e^{-x} - 1) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $e^{-x} - 1 = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $-x = \ln(1)$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 0$ si et seulement si $\boxed{x = 0}$

Partie B - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n > 0$.
   — **Initialisation** Pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$.
   — **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Puisque $e^{-u_n} > 0$ car les valeurs de l'exponentielle sont toujours strictement positives et $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{>0} \times \underbrace{e^{-u_n}}_{>0} \text{ est strictement positif.}$$

   $\boxed{\text{D'où la conclusion par récurrence}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n > 0$ avec la question 1, donc $e^{-u_n} < 1$ et donc, à nouveau puisque $u_n > 0$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} < u_n$. On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

3. Nous avons vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 à la Question 1, décroissante à la Question 2, $\boxed{\text{elle est donc convergente}}$ par le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n e^{-u_n} = \ell e^{-\ell} = f(\ell)$. Ainsi on en déduit que ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$ et donc, par la Partie A, Question 3, $\boxed{\ell = 0}$

Partie C - Étude de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} > 0 \text{ par la Partie B, Question 1.}$$

   Ainsi $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} = e^{-S_n}$.
   — **Initialisation** Pour $n = 0$, d'une part $u_1 = 1e^{-1} = e^{-1}$. D'autre part, $S_0 = 1$ et donc $e^{-S_0} = e^{-1} = u_1$.
   — **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} = e^{-S_n}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1}e^{-u_{n+1}} \text{ par définition} \\ &= e^{-S_n}e^{-u_{n+1}} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= e^{-S_n-u_{n+1}} \text{ car } \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \text{ pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \\ &= e^{-S_{n+1}} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{D'où la conclusion par récurrence}}$

3. Puisque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, le théorème de limite monotone nous permet d'affirmer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ou la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   On raisonne par l'absurde. Supposons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-S_n} = e^{-\ell}$. Et, avec la Question 2, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = e^{-\ell} > 0$ qui est contradictoire avec la limite nulle pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvée à la Partie B, Question 3.

Problème 3 : équation différentielle

1. La fonction h' vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1, $y' + 2my = 0$. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont de la forme $x \mapsto Ke^{-2mx}$. Ainsi, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = Ke^{-2mx}$. Remarquons que $h'(0) = K$. D'où $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ h'(x) = h'(0)e^{-2mx}}$.

   Puis, en intégrant, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(0) + h'(0)e^{-2mx}}$.

2. Soit f définie par $f(x) = h(x)e^{mx}$. La fonction f est solution de l'équation différentielle (E_m)
   si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - m^2 f(x) = 0$
   si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x)e^{mx} + 2mh'(x)e^{mx} + m^2h(x)e^{mx} - m^2h(x)e^{mx} = 0$
   si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x)e^{mx} + 2mh'(x)e^{mx} = 0$
   si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) + 2mh'(x) = 0$
   si et seulement si $\boxed{h \text{ vérifie la propriété } (P_m)}$

3. D'après la Question 2, f est solution de (E_m) si et seulement si, en notant $f(x) = h(x)e^{mx}$, h vérifie la propriété (P_m) si et seulement si $f(x) = h(x)e^{mx}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = K + Le^{-2mx}$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E_m) est donné par

$$\boxed{x \mapsto Ke^{mx} + Le^{-mx}, \text{ où } K \in \mathbb{R} \text{ et } L \in \mathbb{R}}$$

4. D'après la Question 4, il existe deux constantes réelles K et L telles que $x(t) = Ke^{0.5t} + Le^{-0.5t}$. Remarquons que avec les conditions initiales données, $4 = x(0) = Ke^0 + Le^0 = K + L$, $0 = x'(0) = 0.5Ke^0 - 0.5Le^0 = 0.5K - 0.5L$ et l'on obtient donc le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} K & + & L & = & 4 \\ K & - & L & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 2K & & & = & 4 \\ & & L & = & K \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} K & & & = & 2 \\ & & L & = & 2 \end{array}\right.$$

   On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ x(t) = 2e^{0.5t} + 2e^{-0.5t}}$

Problème 4 : distance entre deux droites de l'espace

Partie A - Intersection de deux plans

1. Remarquons qu'un vecteur normal de P est donné par $\overrightarrow{n}(2, 5, -1)$ et un vecteur normal de P' est donné par $\overrightarrow{n'}(-2, 1, 1)$. Puisque $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que P et P' ne sont pas parallèles. On en déduit que $\boxed{P \text{ et } P' \text{ sont sécants}}$

2. On vérifie que $2 \times (-4) + 5 \times (-2) - 2 + 20 = -8 - 10 - 2 + 20 = 0$ d'où $A \in P$. De même, on vérifie que $-2 \times (-4) + 1 \times (-2) + 2 - 8 = 8 - 2 + 2 - 8 = 0$ d'où $A \in P'$. Par suite $A \in P \cap P'$ et donc, par définition, $\boxed{A \text{ appartient à } D}$

   Par définition un vecteur directeur de D doit être dans la direction de P et dans la direction de P' et donc orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Ainsi tout vecteur directeur est colinéaire au produit vectoriel $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$ $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ dont les coordonnées sont $(6, 0, 12)$. Par exemple, $\boxed{\overrightarrow{v}(1, 0, 2) \text{ est un vecteur directeur de } D}$

   Bon ici, on tricote un peu avec le produit vectoriel. Si l'on est un tout petit peu plus astucieux, on peut aussi utiliser l'énoncé de la Question 3 pour deviner un deuxième point B dans la droite D (par exemple pour $t = 1$). On vérifie alors que $B(-3, -2, 4)$ est dans D également (comme pour A) et l'on dit que $\overrightarrow{AB}(1, 0, 2)$ est un vecteur directeur de D

3. Puisque D est une droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$, on en déduit qu'un point $M(x,y,z)$ de l'espace appartient à D si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M = A + t\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\boxed{M(x,y,z) \text{ vérifie } \begin{cases} x &= -4 + t \\ y &= -2 \\ z &= 2 + 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}}$

Partie B - position relative de deux droites

1. On a vu qu'un vecteur directeur de D était $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1,0,2)$. Avec la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(0,1,1)$. Puisque $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont non-colinéaires, on en déduit que $\boxed{D \text{ et } \Delta \text{ ne sont pas parallèles}}$

2. $\boxed{\text{On raisonne par l'absurde.}}$ Supposons qu'il existe un point $M(x,y,z)$ commun à D et Δ, il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = -4 + t$, $y = -2$ et $z = 2 + 2t$ d'une part et il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $x = 5$, $y = 2 + s$ et $z = s$. On en déduit alors que $5 = -4 + t$, $-2 = 2 + s$ et $2 + 2t = s$. La première équation nous donne $t = 9$, la deuxième nous donne $s = -4$ et quand l'on injecte ces valeurs dans la dernière on obtient $20 = -4$ ce qui est manifestement faux. D'où la conclusion : il n'y a pas de point commun à D et Δ. Autrement dit, $\boxed{D \text{ et } \Delta \text{ ne sont pas sécantes}}$

3. Puisqu'elles ne sont ni parallèles (Question 1) ni sécantes (Question 2), on en déduit que

$$\boxed{D \text{ et } \Delta \text{ sont coplanaires}}$$

Partie C - distance entre deux droites

1. Écrivons, en accord avec la représentation paramétrique de D obtenue à la Partie A, Question 3, $x_1 = -4 + t$, $y_1 = -2$ et $z_1 = 2 + 2t$ où $t \in \mathbb{R}$. De même $x_2 = 5$, $y_2 = 2 + s$ et $z = s$ où $s \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est alors de coordonnées $(9 - t, 4 + s, s - 2t - 2)$. La droite (IJ) est perpendiculaire à D et à Δ si et seulement si $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}(1,0,2)$ et $\overrightarrow{w}(0,1,1)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (\overrightarrow{IJ}|\overrightarrow{v}) = 0 \\ (\overrightarrow{IJ}|\overrightarrow{w}) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - t + 2s - 4t - 4 &= 0 \\ 4 + s + s - 2t - 2 &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -5t + 2s &= -5 \\ -2t + 2s &= -2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -5t + 2s &= -5 \\ 3t &= 3 \end{cases} \quad L_2 \to L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -5t + 2s &= -5 \\ t &= 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2s &= 0 \\ t &= 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} s &= 0 \\ t &= 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi seuls $\boxed{(x_1,y_1,z_1) = (-3,-2,3) \text{ et } (x_2,y_2,z_2) = (5,2,0)}$ conviennent.

2. Les points I et J ainsi définis réalisent le minimum de la distance entre D et Δ. Ainsi la valeur recherchée est

$$\begin{aligned}
IJ &= \sqrt{(5-(-3))^2 + (2-(-2))^2 + (0-3)^2} \\
&= \sqrt{64 + 16 + 9} \\
&= \boxed{\sqrt{89}}
\end{aligned}$$